

SUR LA CLASSIFICATION ET LE DENOMBREMENT DES SOUS-GROUPES DU GROUPE MODULAIRE ET DE LEURS CLASSES DE CONJUGAISON

SAMUEL ALEXANDRE VIDAL

ABSTRACT. In this article we give a classification of the sub-groups in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ and of the conjugacy classes of these sub-groups by the mean of an combinatorial invariant : some trivalent diagrams (dotted or not). We give explicit formulae enabling to count the number of isomorphism classes of these structures and of some of their variations, as function of the number of their arcs. Until now, the counting of non-dotted diagrams was an open problem, for it gives also the number of unrooted combinatorial maps, triangular or general respectively. The article ends with the description of a high performance algorithm to enumerate those structures witch is built upon an unexpected factoring of the cycle index series of the considered combinatorial species.

RÉSUMÉ. Dans cet article nous donnons une classification des sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et les classes de conjugaison de ces sous-groupes au moyen d'un invariant de nature combinatoire : des diagrammes trivalents (pointés ou non). Nous donnons des formules explicites permettant de compter les classes d'isomorphisme de ces structures et de plusieurs de leurs variantes, en fonction du nombre de leurs arcs. Jusqu'à présent, le dénombrement de diagrammes non-pointés était un problème ouvert du fait que cela donne le nombre de cartes combinatoire non-enracinées, triangulaires ou quelconques respectivement. L'article s'achève par la description d'un algorithme extrêmement efficace pour énumérer ces structures qui s'appuie sur une factorisation inattendue de la série indicatrice des cycles des espèces combinatoires considérées.

0. INTRODUCTION

Les sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ interviennent par exemple dans l'étude des équations fonctionnelles de fonctions multivaluées sur des courbes algébriques projectives *i.e.* surfaces de Riemann compactes, notamment dans l'étude des fonctions Polylogarithmes généralisées sur des revêtements algébriques de la sphère de Riemann. On sait par ailleurs qu'elles correspondent de façon exhaustive [2], aux courbes algébriques projectives (munies d'un nombre fini de *points marqués*) définies sur la clôture algébrique $\bar{\mathbb{Q}}$ du corps des nombres rationnels \mathbb{Q} . L'étude de ces structures

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 05C25, 05C30, 05C85, 20F05 ; Secondary 20F10, 05C38, 20F36.

en vue d'une meilleure compréhension du groupe de Galois absolu $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Q}})$ constitue un des points les plus saillants du vaste programme galoisien d'A. Grothendieck [19] comme en témoigne le nombre de publications de haut niveau consacrées à ces questions sur les vingt dernières années. On peut même faire remonter l'origine de ce sujet aux travaux de F. Klein sur la géométrie de l'icosaèdre [14].

Le point principal se trouve sans doute être que $\text{Gal}_{\mathbb{Q}}(\bar{\mathbb{Q}})$ agit *fidèlement* sur la catégorie de ces revêtements (en modifiant les données de monodromie). Cette action est toutefois encore très loin d'être bien comprise et cela en dépit des nombreux efforts qui ont été consacrés à son étude. Elle jouit d'excellentes propriétés de finitude, ce qui attise l'espoir de parvenir un jour à la décrire complètement. Les objets permutés sont en effet des structures combinatoires basiques et les orbites de cette action sont toutes finies. Un nombre important de publications ont été consacrées et sont encore consacrées à l'étude d'invariants préservés par cette action de groupe dans l'espoir d'en caractériser un jour les orbites avec précision.

L'étude des formes modulaires s'est pour l'instant beaucoup concentrée sur la famille des sous-groupes de congruences présents dans $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ lesquels reçoivent une interprétation modulaire astucieuse dûe à P. Deligne [9]. Ils sont associés à la catégorie des courbes elliptiques classifiées modulo leurs isogénies centralisées par leurs points de n -division.

Le groupe modulaire se conçoit également comme l'exemple le plus significatif de groupe Fuchsien ainsi qu'en témoignent les illustres travaux d'H. Poincaré. Son action sur le demi-plan de Poincaré \mathcal{H} est donnée par les transformations homographiques

$$\pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{Im } \tau > 0$$

avec a, b, c et d entiers rationnels vérifiant $ad - bc = 1$. Cette action de groupe admet un domaine fondamental \mathcal{F} qui produit un pavage du demi-plan de Poincaré par des triangles hyperboliques. La figure 1 reprend cette situation qui est des plus classiques.

Les éléments τ du demi-plan de Poincaré \mathcal{H} sont sensés représenter l'invariant ω_2/ω_1 , où (ω_1, ω_2) décrit une base orientée d'un réseau de \mathbb{C} . C'est un invariant complet pour l'action du groupe \mathbb{C}^* des homothéties complexes. Une telle base est dite *réduite* lorsqu'elle satisfait aux conditions de Gauss, qui exprimées en terme de l'invariant τ se réduisent aux inégalités suivantes :

$$|1| \leq |\tau| \quad |\tau - 1| \leq |\tau| \quad |\tau + 1| \leq |\tau|$$

et ce sont précisément celles-ci qui définissent le domaine fondamental \mathcal{F} de l'action du groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ sur le demi-plan de Poincaré.

Dans ce travail, nous parvenons à classifier les sous-groupes du groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$, ainsi que leurs classes de conjugaison, au moyen d'invariants de nature combinatoire : des diagrammes. Notre argument s'applique en principe, moyennant quelques adaptations triviales, au cas du produit libre de deux groupes cycliques quelconques. Par exemple, le groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$ est produit libre des deux

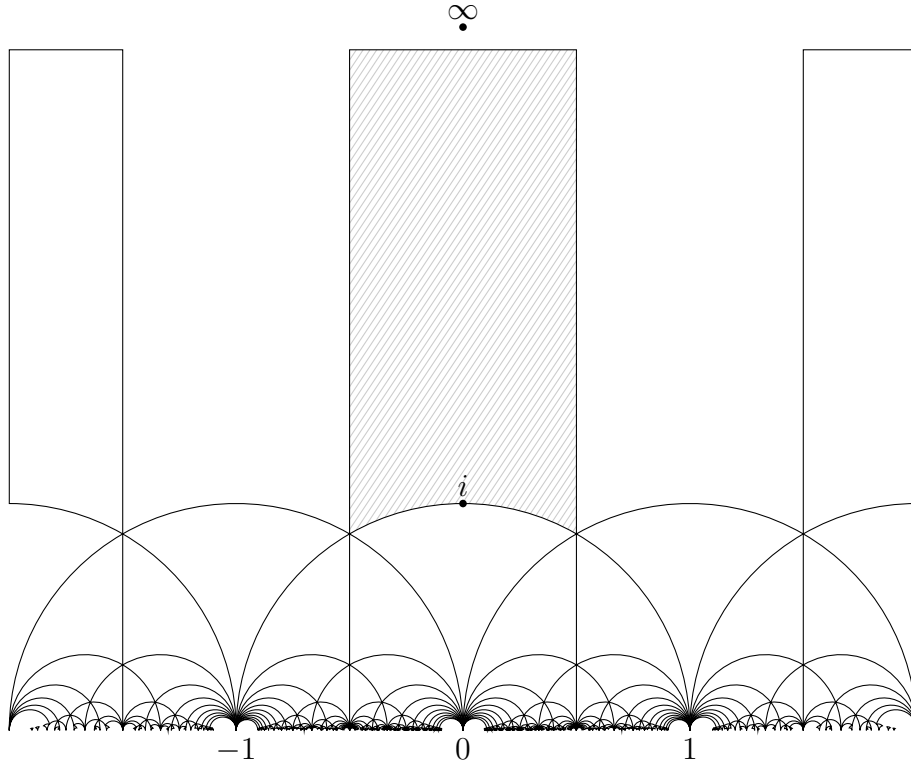


FIG. 1. Pavage du demi-plan de Poincaré par les translatsés du domaine fondamental \mathcal{F} sous l'action du groupe modulaire $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

groupes cycliques $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et ses sous-groupes se classifient de fait au moyen de diagrammes trivalents. On donne des critères simples sur les diagrammes permettant de décider récursivement (*i.e.* au moyen d'un algorithme) si un sous-groupe est distingué, si deux sous-groupes sont conjugués, ou plus simplement si deux sous-groupes sont en relation d'inclusion. On parvient en particulier aux correspondances biunivoques suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Diagrammes trivalents} & \longleftrightarrow & \text{Sous-groupes de } \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\
 \text{à isomorphismes près} & & \text{à conjugaison près} \\
 \\
 \text{Diagrammes trivalents pointés} & \longleftrightarrow & \text{Sous-groupes de } \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \\
 \text{à isomorphismes près} & &
 \end{array}$$

Fort de ces équivalences, nous obtenons des formules générales, sous forme de séries génératrices pour compter le nombre de sous-groupes d'indice fini donné dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ et le nombre de leurs classes de conjugaison. Elles coïncident en effet avec le nombre de digrammes trivalents et leurs variantes pointés pour un nombre d'arcs donné. On aboutit dans un premier temps à la formule générale donnant le nombre de diagrammes trivalents *pointés*, laquelle conduit aux premières valeurs suivantes,

$$\tilde{D}_3^\bullet(t) = t + t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 5t^5 + 22t^6 + 42t^7 + 40t^8 + 120t^9 + \dots$$

Lesquelles avaient déjà calculées par Stothers en 1977 [30].

La formule générale donnant le nombre de diagrammes trivalents *non-pointés* de taille donnée laquelle permet de compter le nombre de *classes de conjugaison* de sous-groupes ayant un indice fini donné dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$,

$$\tilde{D}_3(t) = t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5 + 8t^6 + 6t^7 + 7t^8 + 14t^9 + \dots$$

était restée jusqu'à maintenant un problème ouvert et elle est nettement plus difficile à obtenir. La solution que nous présentons, fait intervenir de façon cruciale la théorie des *espèces combinatoires*, due à A. Joyal et aux travaux de l'école québécoise de combinatoire. Les tables 1 à 5 pages 12 à 14 donnent une liste exhaustive des diagrammes trivalents *non pointés* de taille inférieure à *neuf*. Elles vérifient précisément ce décompte.

On dispose également d'une interprétation des diagrammes trivalents en terme de revêtements et la représentation de monodromie correspondante permet une relecture de ce dénombrement en terme de permutations : le n -ième terme correspond au nombre de paires de permutations (τ_1, τ_2) à conjugaison simultanée près qui agissent transitivement sur un ensemble de taille n et qui vérifient les conditions d'*involutivité* $\tau_1^2 = \mathrm{id}$ et de *triangularité* $\tau_2^3 = \mathrm{id}$.

Enfin, la formule générale, écrite naïvement, pose de sérieux problèmes de complexité : les calculs nécessaires pour en déterminer les coefficients interdisent par leur volume de considérer des termes au delà des tout premiers. Nous nous sommes donc attaché dans la dernière partie de cet exposé à donner une méthode de calcul efficace. Celle-ci s'appuie sur une factorisation inattendue de la série génératrice correspondante. Il en résulte un effondrement de la complexité qui autorise un calcul en très grand poids. On illustre ce point en donnant les termes de poids cinq-cent des séries considérées.

1. PRÉLIMINAIRES COMBINATOIRES

1.1. Graphes Généralités. Dans cette section nous introduisons une variante de la notion de graphe, laquelle servira de point de départ à la construction de notre invariant combinatoire. La définition présentée ici diffère légèrement de la notion habituelle de graphe mais le texte signalera clairement ces quelques différences. On s'attachera en outre, dans la section suivante à décrire une opération permettant de construire un graphe au sens habituel à partir d'un graphe au sens de la définition ci-dessous, et la donnée d'une structure supplémentaire sur le graphe ainsi construit permettra de retrouver l'équivalence avec notre définition.

Définition 1.1. Par un *graphe* Γ , on entend la donnée de deux ensembles Γ_0 et Γ_1 , et de trois applications $s, t : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_0$ et $\cdot^{-1} : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1$. Le tout vérifiant pour tout $a \in \Gamma_1$:

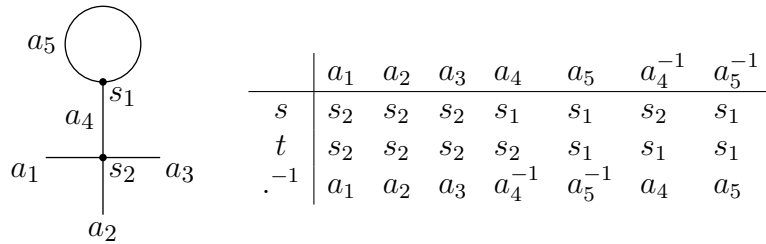
$$(a^{-1})^{-1} = a \qquad s(a^{-1}) = t(a) \qquad t(a^{-1}) = s(a)$$

Les *sommets* du graphe sont les éléments de Γ_0 , ses *arcs* (ou *demi-arêtes*) sont les éléments de Γ_1 et les deux applications s et t font correspondre à toute arc a , son *origine* $s(a)$ et sa *destination* $t(a)$. Comme l'application \cdot^{-1} est involutive, on

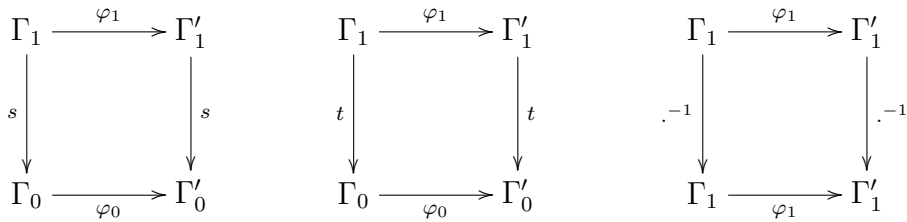
a une action du groupe à deux éléments sur Γ_1 . Les *arêtes* (ou *bi-arcs*) du graphe sont les orbites dans Γ_1 de cette action de groupe. On note Γ_1^* cet ensemble et π la projection $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1^*$.

Remarque. La définition que l'on donne n'exclut pas qu'un même arc ait même origine et même destination, on dit que c'est une *boucle*, ni qu'une arête ne comporte qu'un arc, auquel cas on dit que l'arête est *pliée* [19, p. 15]. En théorie quantique des champs, les diagrammes de Feynman sont des structures qui admettent de telles arêtes pliées, pour lesquelles une extrémité reste "ouverte", ce sont les *arêtes externes* du diagramme ou *pattes externes*.

Exemple 1. On observe que le graphe suivant admet *deux* sommets et *cinq* arêtes dont trois sont pliées. Il y a donc *sept* arcs. Le tableau précise les valeurs des trois applications correspondantes. On a posé $\Gamma_0 = \{s_1, s_2\}$ et $\Gamma_1 = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_4^{-1}, a_5^{-1}\}$.



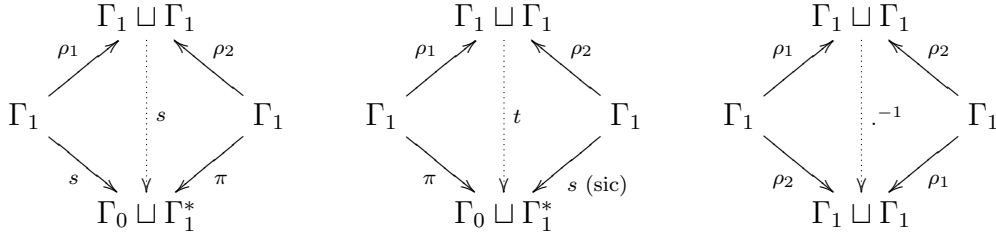
Définition 1.2. Un *morphisme* φ entre deux graphes Γ et Γ' est la donnée de deux applications $\varphi_0 : \Gamma_0 \rightarrow \Gamma'_0$ et $\varphi_1 : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma'_1$ compatibles aux applications de structure en ce sens que les diagrammes suivants commutent :



1.2. Subdivision Barycentrique. Nous décrivons maintenant un procédé simple pour se débarrasser des boucles et des arêtes pliées. La *subdivision barycentrique* est l'opération qui associe à tout graphe Γ le graphe Γ^{sb} obtenu à partir de Γ en ajoutant un sommet supplémentaire au milieu de chaque arête.

De façon plus précise, on associe à Γ le graphe Γ^{sb} avec $\Gamma_0^{\text{sb}} = \Gamma_0 \sqcup \Gamma_1^*$ et $\Gamma_1^{\text{sb}} = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_1$. Les trois applications de structure sont définies par les trois diagrammes commutatifs suivants où l'on note ρ_1 et ρ_2 les injections naturelles associées à la

réunion disjointe $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_1$:



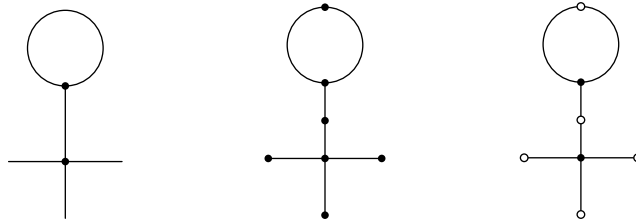
L'opération est évidemment *fonctorielle* mais n'admet pas d'opération inverse, ne serait-ce que parce qu'une fois l'opération effectuée, il n'y a plus moyen de distinguer les sommets qui proviennent de Γ_0 de ceux qui proviennent de Γ_1^* . Autrement dit, le foncteur n'est pas fidèle. Une façon de remédier au problème consiste à enrichir la catégorie d'arrivée par une information de *couleur*.

Définition 1.3. Un *graphe bicolorié* est un graphe Γ muni d'une application α de l'ensemble de ses sommets à valeurs dans $\{0, 1\}$.

Par convention, on qualifera de *blancs* (resp. de *noirs*) les sommets x tels que $\alpha(x) = 0$ (resp. $\alpha(x) = 1$). Les morphismes de graphes bicoloriés sont les morphismes de graphes qui préservent cette information supplémentaire.

L'opération de *subdivision barycentrique enrichie* est alors, l'opération qui à un graphe Γ associe le graphe Γ^{sb} muni de la coloration qui aux sommets provenant de Γ_0 associe la valeur *un* (noir) et à ceux qui proviennent de Γ_1^* associe la valeur *zéro* (blanc). On notera $\Gamma^{\text{sb}+}$ le graphe bicolorié ainsi obtenu.

Exemple 2. On reprend dans le dessin de gauche le graphe de l'exemple 1 plus haut. On représente au centre le résultat de sa subdivision barycentrique et à droite le résultat de sa subdivision barycentrique enrichie.



Le foncteur $\cdot^{\text{sb}+}$ que l'on obtient par ce qui précède est *pleinement fidèle*. Il n'est en revanche pas *surjectif* pas même au sens faible d'*essentiellement surjectif*. Les sommets blancs sont en effet toujours de degré *un* ou *deux*, suivant qu'ils proviennent d'une arête pliée ou non. De plus, deux sommets de même couleur ne sont jamais reliés par une même arête.

Définition 1.4. Un graphe bicolorié est dit *propre* (*clean*) si ses sommets blancs sont de degré *un* ou *deux* et si deux sommets de même couleur ne sont jamais reliés par une même arête.

On vérifie sans peine que le foncteur de subdivision barycentrique enrichie $\cdot^{\text{sb}+}$ est essentiellement surjectif sur la *sous-catégorie pleine* des graphes bicoloriés propres.

Il résulte donc une équivalence de catégories entre cette dernière et la catégorie des graphes au sens des définitions 1.1 et 1.2.

Remarque subsidiaire. Il y a une bijection naturelle évidente entre l'ensemble des arcs d'un graphe et les arêtes de sa subdivision barycentrique; elle est d'ailleurs *unique* (à conjugaison par \cdot^{-1} près.)

1.3. Orientation Cyclique aux Sommets. Dans ce qui suit, nous allons procéder à quelques enrichissements supplémentaires de la catégorie des graphes.

Définition 1.5. L'*étoile* relative à un sommet x d'un graphe Γ est par définition l'ensemble $s^{-1}(x) = \{a \in \Gamma_1 \mid s(a) = x\}$ des arcs ayant pour origine ce sommet.

Etant donné un graphe Γ , une *orientation cyclique aux sommets* est la donnée d'une action $(a, k) \mapsto a + k$ du groupe cyclique infini \mathbb{Z} sur l'ensemble des arcs de Γ qui premièrement, soit compatible aux *étoiles* au sens où $s(a + 1) = s(a)$ quel que soit l'arc a et qui d'autre part, soit *étoile-transitive* au sens où quels que soient les arcs a_1 et a_2 , la condition $s(a_1) = s(a_2)$ entraîne l'existence d'une relation $a_1 = a_2 + k$ avec k dans \mathbb{Z} . Nous adopterons la formulation équivalente suivante, moins pesante.

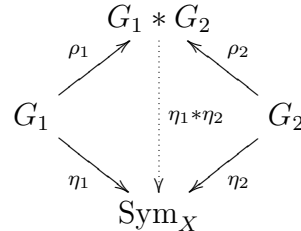
Définition 1.6. Un graphe Γ est dit *cycliquement orienté aux sommets* s'il est muni d'une action de \mathbb{Z} sur Γ_1 dont les orbites coïncident exactement avec les étoiles du graphe.

Remarque. Il reviendrait au même de munir indépendamment chaque étoile d'une action transitive de \mathbb{Z} mais les notations seraient alors moins transparentes.

Définition 1.7. Un *morphisme* de graphes cycliquement orientés aux sommets est un morphisme de graphes φ dont la composante φ_1 est un morphisme de \mathbb{Z} -ensembles (*i.e.* $\varphi_1(a + 1) = \varphi_1(a) + 1$ quel que soit a).

Principe 1. La catégorie des ensembles munis de deux actions indépendantes, d'un groupe G_1 et d'un groupe G_2 , où les morphismes sont les applications qui commutent simultanément aux deux actions, est *isomorphe* à la catégorie des ensembles munis d'une action du produit libre $G_1 * G_2$.

Démonstration. Cela résulte de la propriété universelle du produit libre : en notant ρ les morphismes naturels associés au produit libre et η les morphismes de structure de ces actions de groupes, on voit qu'ils s'insèrent dans un diagramme commutatif comme suit :



Fin de la démonstration. □

Application. En faisant $G_1 = \mathbb{Z}$ et $G_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on voit qu'un graphe Γ cycliquement orienté aux sommets est canoniquement muni d'une action du groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, produit libre du groupe cyclique infini \mathbb{Z} avec le groupe à deux éléments

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, sur l'ensemble de ses arcs, qui soit compatible aux morphismes naturels $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \leftarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

L'opération qui à un graphe muni d'une orientation cyclique aux sommets associe l'ensemble de ses arcs munis de cette action de groupe est fonctorielle (*foncteur d'oubli*). On voit tout de suite qu'elle ne peut pas être fidèle puisque deux graphes sans arêtes mais comportant un nombre de sommets différent ne sont pas distingués à l'arrivée. On est donc amené à restreindre la catégorie de *départ* :

Définition 1.8. On dira qu'un graphe muni d'une orientation cyclique aux sommets est un *diagramme* s'il ne comporte aucun sommet isolé.

Variante. Un diagramme sera qualifié de *trivalent* si ses sommets sont tous d'ordre un ou trois.

Lemme 1.1. *Un diagramme est trivalent si et seulement si l'action de \mathbb{Z} sur ses arcs vérifie la condition $a + 3 = a$ pour tout a .*

Démonstration. C'est clair.

Théorème 1.2. *Le foncteur d'oubli, qui à un diagramme associe l'ensemble de ses arcs muni de l'action du groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Nous allons décrire une opération de *reconstruction* qui à un ensemble muni d'une action de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ redonne un diagramme *naturellement isomorphe* au diagramme de départ. Nous n'explicitons pas la functorialité car celle-ci découle immédiatement de la nature des opérations utilisées.

Soit X un ensemble muni d'une action du groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on lui associe le graphe dont l'ensemble des arcs est X et dont l'ensemble des sommets est le quotient de X par l'action du groupe \mathbb{Z} . L'application s est la projection canonique $X \rightarrow X/\mathbb{Z}$, et l'application $\cdot^{-1} : X \rightarrow X$ est l'involution associée à l'élément non-trivial de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'application $t : X \rightarrow X/\mathbb{Z}$ est alors définie par $t(a) = s(a^{-1})$.

Les trois conditions de la définition 1.1 sont bien vérifiées. D'autre part, vu la construction, l'action de \mathbb{Z} est bien compatible à l'application s au sens de la définition 1.6. La définition 1.8 est elle aussi satisfaite puisque l'application s est *surjective*.

Il reste maintenant à exhiber l'isomorphisme naturel φ entre le diagramme de départ Γ et le diagramme reconstruit via cette opération : pour la composante φ_1 on choisit simplement l'identité de Γ_1 , la composante φ_0 nécessite en revanche un raisonnement. Il est immédiat au vu des définitions 1.6 et 1.8 que la paire (Γ_0, s) est un représentant du foncteur qui à tout ensemble Y associe l'ensemble des applications $u : \Gamma_1 \rightarrow Y$ pour lesquelles on ait $u(a + 1) = u(a)$ quel que soit $a \in \Gamma_1$. Il résulte un isomorphisme naturel *canonique* entre la paire (Γ_0, s) et la paire $(\Gamma_1/\mathbb{Z}, \pi)$ où π désigne la projection $\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1/\mathbb{Z}$. On fait le choix de cette bijection pour φ_0 . La commutativité des trois diagrammes de la définition 1.2 est alors immédiate par naturalité. Fin de la démonstration. \square

Le résultat suivant permet de raffiner l'équivalence que l'on vient d'obtenir.

Théorème 1.3. *Un diagramme est connexe si et seulement si l'action du groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur ses arcs est transitive.*

Démonstration. On rappelle qu'un graphe est connexe s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets distincts x et y . C'est-à-dire une suite finie d'arcs a_0, \dots, a_n telle que $s(a_0) = x$, $t(a_n) = y$ et $t(a_{k-1}) = s(a_k)$ pour $k = 1, \dots, n$. Comme l'action de \mathbb{Z} est supposée transitive sur chaque étoile, il revient au même de supposer qu'il existe une suite d'entiers r_1, \dots, r_n telle que $a_{k-1}^{-1} = a_k + r_k$. Comme d'autre part l'application s est supposée surjective, cela équivaut bien à ce que l'action de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ soit transitive sur les arcs. Fin de la démonstration. \square

Corollaire. *Il résulte que la catégorie des diagrammes connexes est équivalente à celle des $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -ensembles transitifs.*

Convention. Dans ce qui suit, sauf mention expresse du contraire, les diagrammes seront tous supposés *connexes*.

1.4. Diagrammes Pointés.

Définition 1.9. Un diagramme est dit *pointé* lorsqu'il est muni d'un *arc distingué*, lequel est appelé *point base* du diagramme (*sic*). Les morphismes de diagrammes pointés seront toujours supposés respecter les points base.

Cette définition est justifiée par le résultat suivant :

Lemme 1.4. *Un morphisme φ entre deux diagrammes connexes Γ et Γ' est complètement déterminé par la donnée d'un arc de Γ et de son image.*

Il est clair qu'inversement, il n'existe pas toujours de morphisme d'un diagramme pointé Γ dans un autre Γ' . On dispose d'un critère précis :

Lemme 1.5. *Il existe un morphisme pointé $\varphi : (\Gamma, a) \rightarrow (\Gamma', a')$ entre deux diagrammes connexes Γ et Γ' si et seulement si les fixateurs de a et de a' dans $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ satisfont à la relation d'inclusion suivante :*

$$\text{Fix}_a(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subseteq \text{Fix}_{a'}(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

En vertu de l'équivalence de catégories démontrée au paragraphe précédent, les deux lemmes sont une conséquence immédiate du principe général suivant :

Principe 2. Etant donnés deux ensembles pointés (X, x) et (Y, y) munis chacun d'une action transitive d'un même groupe G , il existe une application équivariante pointée $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ si et seulement si les fixateurs de x et de y dans G satisfont à la relation d'inclusion suivante :

$$\text{Fix}_x(G) \subseteq \text{Fix}_y(G)$$

Une telle application est nécessairement unique.

Remarque. Il n'est pas nécessaire de supposer que le groupe G opère transitivement sur l'ensemble d'arrivé Y . Toutefois, si l'on ne suppose plus que l'action de G sur X soit transitive, il faut généraliser la notion de pointage pour retrouver un énoncé analogue.

Démonstration. Comme l'action de G sur X est supposée transitive, la condition que f soit pointée et équivariante suffit à la déterminer complètement. En effet, pour tout élément x' de X , on peut choisir un élément g de G tel que $x' = g.x$ et alors $f(x') = f(g.x) = g.f(x) = g.y$. Montrons à présent que la fonction f est indépendante de ce choix. Cela correspond à ce que $g.x = g'.x$ entraîne $g.y = g'.y$ quels que soient g et g' deux éléments de G . Il est par ailleurs évident que cette condition revient exactement à ce que les fixateurs de x et de y vérifient l'inclusion de l'énoncé. Fin de la démonstration. \square

Corollaire. Une conséquence importante de l'unicité que l'on observe dans le principe précédent, est que si l'on a deux morphismes pointés comme suit,

$$(\Gamma, a) \rightarrow (\Gamma', a') \quad \text{et} \quad (\Gamma', a') \rightarrow (\Gamma, a)$$

ce sont nécessairement deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre.

1.5. Aspects Algorithmiques. Une conséquence intéressante de l'enrichissement que constitue la donnée d'une orientation cyclique en chaque sommet, est qu'il est très commode de décider *récurivement* (c'est-à-dire au moyen d'un *algorithme*) s'il existe un morphisme pointé $\varphi : (\Gamma, a) \rightarrow (\Gamma', a')$ entre deux diagrammes connexes *finis* Γ et Γ' .

Définition 1.10. Une *paire critique* (relativement à deux diagrammes Γ et Γ') est par définition un couple (a, a') constitué d'un arc de chacun des graphes (a dans Γ_1 et a' dans Γ'_1) pour lesquels il existe une *obstruction* à la réalisation d'un morphisme pointé $(\Gamma, a) \rightarrow (\Gamma', a')$.

Une telle obstruction prend en vertu du lemme 1.5 ci-dessus, la forme d'un élément g de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tel que $g.a = a$ et $g.a' \neq a'$. Une façon pratique de décider de l'existence d'un tel élément consiste par exemple, à calculer la clôture dans $\Gamma_1 \times \Gamma'_1$ de la paire (a, a') par les deux règles suivantes :

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) &\longrightarrow (a_1 + 1, a_2 + 1) \\ (a_1, a_2) &\longrightarrow (a_1^{-1}, a_2^{-1}) \end{aligned}$$

Il s'agit de la plus petite partie de $\Gamma_1 \times \Gamma'_1$ qui contienne (a, a') et qui soit stable vis-à-vis de ces deux règles.

Comme l'ensemble $\Gamma_1 \times \Gamma'_1$ est *fini* le calcul *termine* et d'après le lemme, la paire (a, a') considérée initialement est critique si et seulement si l'on rencontre deux paires (a_1, a_2) et (a_3, a_4) avec $a_1 = a_3$ et $a_2 \neq a_4$. En arrêtant le calcul dès que cette situation se produit, on peut même relâcher la condition de finitude portant sur le graphe Γ' ; on voit en outre que le nombre d'opérations élémentaires est du même ordre de grandeur que le nombre d'arcs de Γ .

2. PRINCIPE DE CLASSIFICATION

La classification repose en premier lieu sur l'équivalence de catégories entre les diagrammes pointés et les G -ensembles transitifs pointés faisant l'objet du théorème

1.2. Il convient ici d'énoncer quelques généralités supplémentaires concernant cette dernière catégorie.

Principe 3. L'ensemble sous-jacent à un groupe G muni de son action par translation (à gauche) et pointé par l'élément neutre est un objet *initial* dans la catégorie des G -ensembles transitifs pointés — C'est en réalité le cas de tout ensemble pointé sur lequel G opère librement et transitivement. Le point muni de l'action triviale du groupe G et de son pointage tautologique est quant à lui *terminal*.

Principe 4. Soit H un sous-groupe quelconque d'un groupe G et soit (X, x) un ensemble pointé sur lequel G opère à gauche, librement et transitivement (voir par exemple le principe 3 ci-dessus). On définit une action à droite de H sur X par,

$$x'.h \stackrel{\text{def.}}{=} (gh.x) \quad \text{Pour tout } x' = g.x \in X \text{ et tout } h \in H.$$

Cette action dépend évidemment du point base x . On note X/H l'ensemble quotient et $\pi : X \rightarrow X/H$ la projection correspondante. Le quotient X/H est alors canoniquement muni d'une action à gauche de G pour laquelle la projection π soit équivariante. Cette action est transitive et de plus, le fixateur de $\pi(x)$ dans G est exactement H .

Remarque. En vertu du principe 2, ce qui précède est un problème universel. L'objet construit est donc unique à isomorphisme canonique près.

Démonstration. L'action de H à droite est bien définie puisque par hypothèse la représentation $x' = g.x$ existe (G agit transitivement) et est unique (G agit librement). Vérifions que la relation $g.\pi(x') = \pi(g.x')$ définit une action de G sur le quotient X/H , ou plus précisément, que cette relation ne dépend pas du représentant x' de la classe $\pi(x')$. Soit donc x' et x'' deux éléments de X pour lesquels $\pi(x') = \pi(x'')$, il existe donc $h \in H$ tel que $x'.h = x''$. On pose $x' = g'.x$ et $x'' = g''.x$ avec g' et g'' dans G (*uniques*, comme ci-dessus). Il résulte que l'on a $g'.h.x = g''.x$. En faisant agir l'élément g à gauche on obtient $gg'.h.x = gg''.x$. En appliquant π aux deux membres de l'égalité on obtient que $\pi(gg'.h.x) = \pi(gg''.x)$. En faisant agir l'élément h^{-1} à droite sur l'argument de π dans le membre de gauche, on obtient finalement la relation $\pi(gg'.x) = \pi(gg''.x)$ d'où $\pi(g.x') = \pi(g.x'')$. Ceci achève de démontrer que l'action de G induite par π est bien définie. La dernière assertion est évidente. Fin de la démonstration. \square

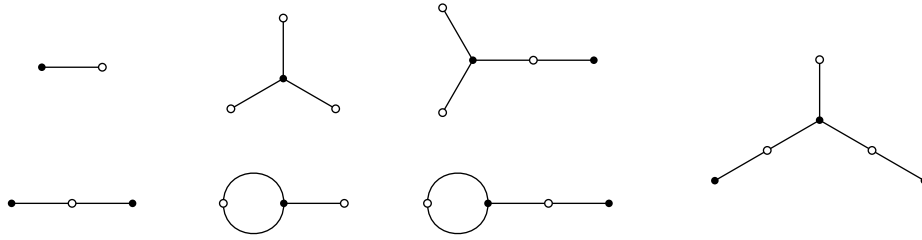
Principe 5. On sait bien que dans un G -ensemble, les fixateurs de deux éléments d'une même orbite sont conjugués. Plus précisément, on a :

$$\text{Fix}_x(G) = g \cdot \text{Fix}_{g.x}(G) \cdot g^{-1}$$

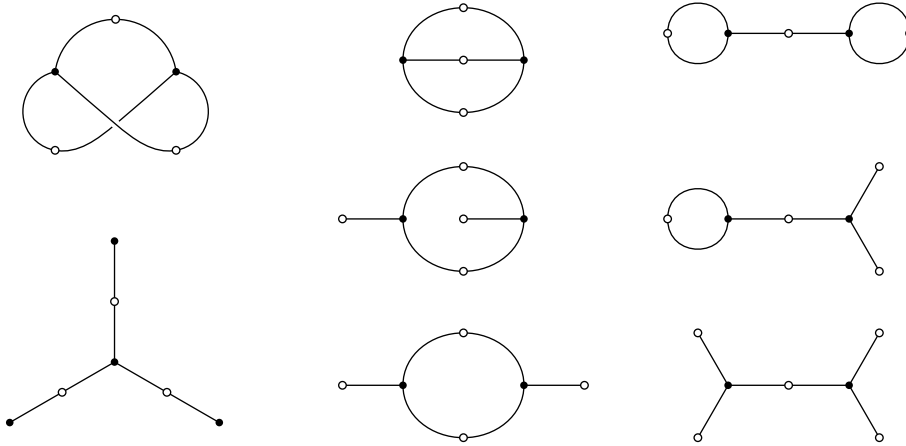
Application 1. Le principe 4 ci-dessus achève de démontrer les deux correspondances biunivoques suivantes :

$$\begin{array}{l} \text{Diagrammes pointés} \\ \text{à isomorphismes près} \end{array} \longleftrightarrow \text{Sous-groupes de } \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l} \text{Diagrammes trivalents pointés} \\ \text{à isomorphismes près} \end{array} \longleftrightarrow \text{Sous-groupes de } \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$$



TAB. 1. Diagrammes trivalents de taille inférieure à cinq.



TAB. 2. Diagrammes trivalents de taille six.

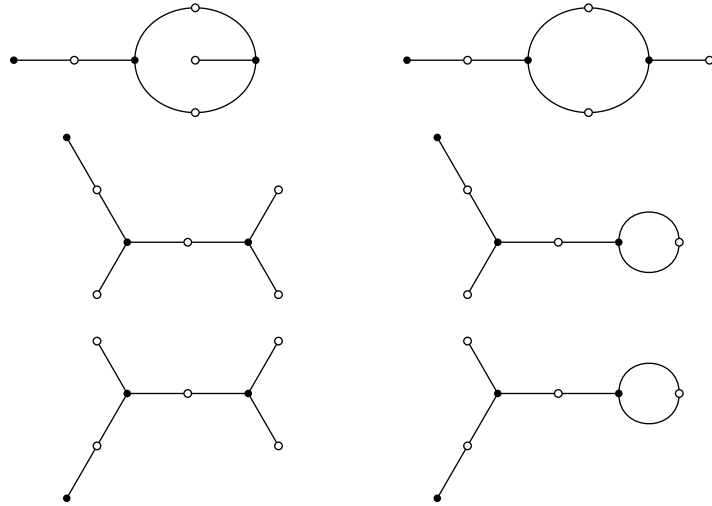
Application 2. Le principe 5 ci-dessus permet de *gommer* les points base. Il en résulte les deux équivalences suivantes.

| | | |
|---|-----------------------|---|
| Diagrammes à isomorphismes près | \longleftrightarrow | Sous-groupes de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ à conjugaison près |
| Diagrammes trivalents à isomorphismes près | \longleftrightarrow | Sous-groupes de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ à conjugaison près |

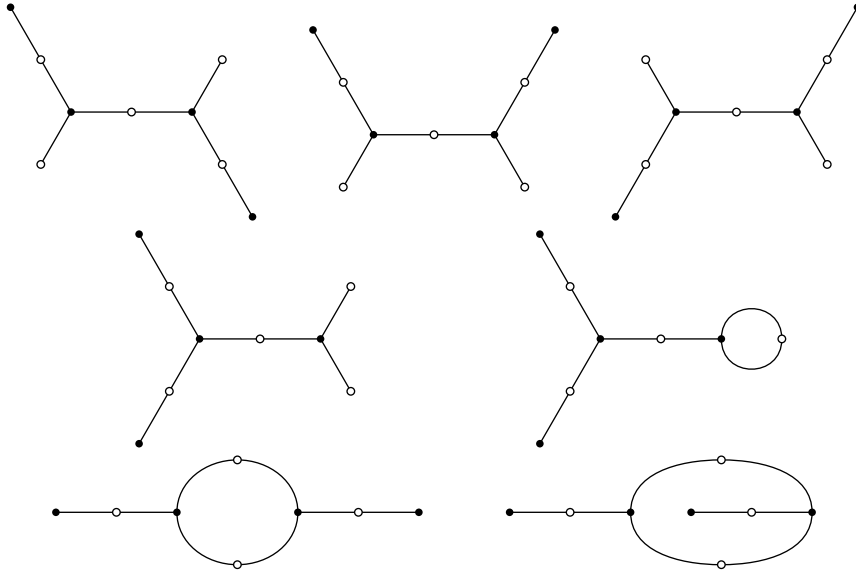
Autrement dit, deux diagrammes pointés correspondent à deux sous-groupes conjugués si et seulement si les diagrammes obtenus en gommant les points base sont isomorphes.

Corollaire. *Un diagramme correspond donc à un sous-groupe distingué si et seulement si son groupe d'automorphismes opère transitivement sur ses arcs.*

Exemples. Les tables 1 à 5 ci-contre, donnent une liste exhaustive des diagrammes trivalents connexes dont la taille est inférieure à neuf. Afin de permettre une meilleure lisibilité de leurs arcs, les diagrammes sont représentés sous la forme de leur subdivision barycentrique enrichie (*cf.* section 1.2). Enfin, dans cette représentation, l'orientation cyclique aux sommets est choisie pour coïncider avec l'orientation trigonométrique du plan du dessin.



TAB. 3. Diagrammes trivalents de taille sept.

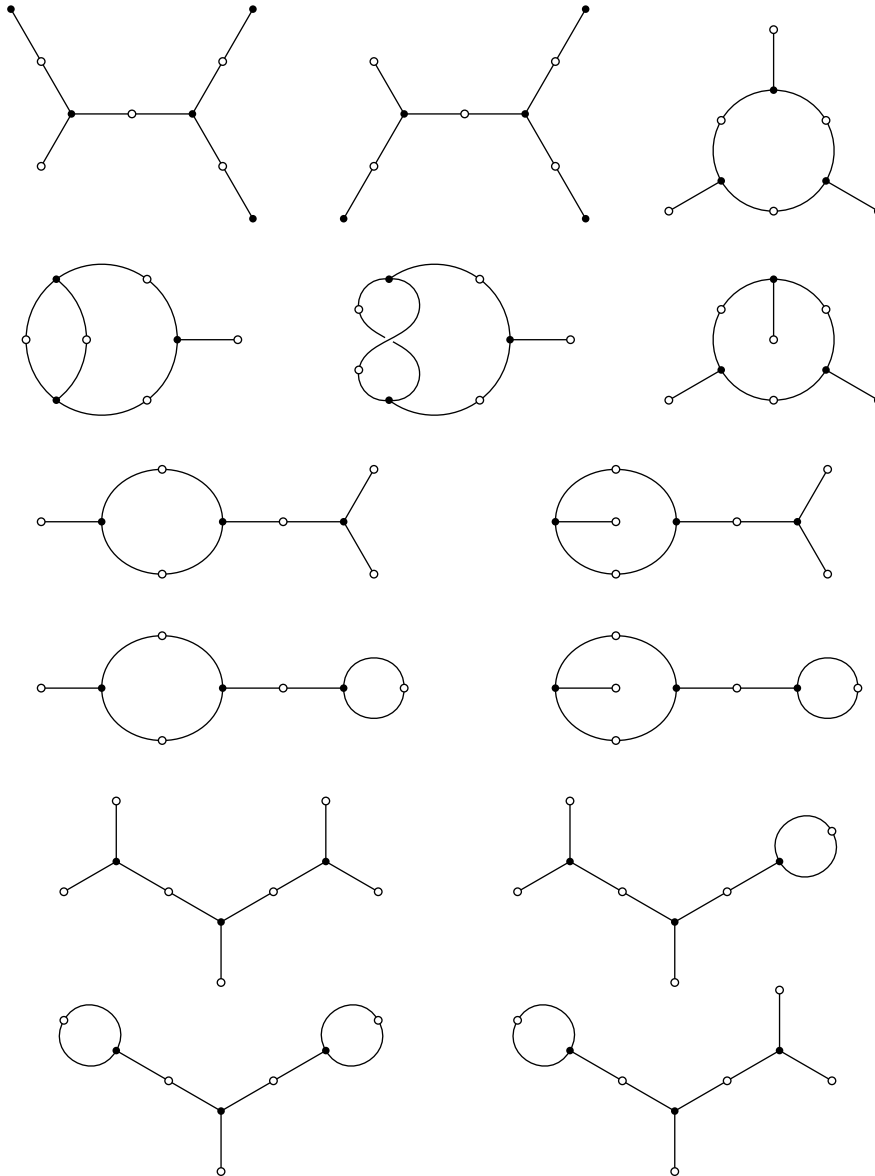


TAB. 4. Diagrammes trivalents de taille huit.

3. DÉNOMBREMENT

Un des objectifs de cet article est à présent, de donner des formules générales, sous forme de séries génératrices, permettant de compter le nombre de diagrammes trivalents connexes ainsi que leurs variantes pointées. Pour obtenir ces séries nous nous sommes appuyés sur quelques résultats de *théorie des espèces*. Par commodité pour le lecteur, nous avons cru bon de présenter dans les sections suivantes un rapide survol des quelques rudiments qui nous sont utiles.

Le lecteur souhaitant approfondir le sujet pourra se référer à l'article fondateur [20], les articles suivants sont consacrés à certains perfectionnements et généralisations : [21], [41] et [42]. Enfin, l'ouvrage [15] reprend remarquablement



TAB. 5. Diagrammes trivalents de taille neuf.

l'ensemble des définitions, notations, et résultats de cette théorie, en un exposé à la fois pédagogique et synthétique.

3.1. Espèces Combinatoires, Généralités. La théorie des espèces débute par une reformulation éclairée de la théorie de Pólya [24, 18]. Il s'agit d'encoder dans une série dite d'index cyclique à une infinité de variables commutatives x_1, \dots, x_k, \dots la combinatoire d'une famille de structures.

Définition 3.1. Une *espèce combinatoire* (au sens de A. Joyal [20]) est un foncteur F de la catégorie des ensembles finis avec bijections, vers celle des ensembles finis avec applications quelconques.

Etant donné un ensemble fini E et une espèce F , les éléments de l'ensemble $F(E)$ sont les F -structures, ou structures d'espèce F , construites sur E . On dit aussi que

l'ensemble E étiquette les structures de l'ensemble $F(E)$. Si ϱ est une bijection entre deux ensembles finis E_1 et E_2 , l'application induite $F(\varrho)$, notée ϱ_* , est le *transport de structure* le long de ϱ , elle associe à toute F -structure sur E_1 une F -structure sur E_2 , elle est de plus *bijective* par functorialité. On considère cette application comme un *réétiquetage*.

Définition 3.2. Un *morphisme* φ entre deux espèces combinatoires F et G est une *opération* qui à tout ensemble fini E associe une application $\varphi_E : F(E) \rightarrow G(E)$ commutant aux applications de transfert de structure au sens où, quel que soit l'application bijective ϱ entre deux ensembles finis E_1 et E_2 , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} F(E_1) & \xrightarrow{\varphi_{E_1}} & G(E_1) \\ \varrho_* \downarrow & & \downarrow \varrho_* \\ F(E_2) & \xrightarrow{\varphi_{E_2}} & G(E_2) \end{array}$$

On résume la situation en disant que φ est une application *naturelle* entre l'ensemble des F -structures construites au dessus d'un ensemble donné et celui des G -structures construites au-dessus du même ensemble.

Le simple fait d'avoir dégagé et mis en lumière cette condition de naturalité, doit être considéré comme un progrès important et un apport significatif de la théorie des espèces. Un tel morphisme, préserve non seulement le décompte des structures étiquetées mais aussi celui des classes de structures obtenues par l'opération de *réétiquetage* *i.e.* l'opération du groupe symétrique, induite par functorialité à partir de son action sur l'ensemble des étiquettes.

Exemples. Nous donnons ici quelques exemples qui seront réutilisés ensuite pour traiter les problèmes énumératifs visés :

1. L'*espèce des ensembles* notée Ens est le foncteur qui, à tout ensemble fini E , associe le singleton $\text{Ens}(E) = \{E\}$ et à toute application bijective $\varrho : E_1 \rightarrow E_2$ associe l'application canonique $\text{Ens}(E_1) \rightarrow \text{Ens}(E_2)$.
2. L'*espèce des permutations* notée S est le foncteur qui, à tout ensemble fini E , associe l'ensemble $S(E)$ des permutations σ de E et qui à toute bijection $\varrho : E_1 \rightarrow E_2$ associe la conjugaison par ϱ définie par $\varrho_*(\sigma) = \varrho \sigma \varrho^{-1}$.
3. L'*espèce des permutations d'ordre n* notée S_n qui, à tout ensemble fini E , associe le sous-ensemble $S_n(E)$ de $S(E)$ constitué des permutation σ vérifiant $\sigma^n = \text{id}$.
4. L'*espèce des cycles* notée C qui à tout ensemble fini E associe le sous-ensemble $C(E)$ de $S(E)$ constitué des permutations cycliques.
5. On définit de même l'*espèce des cycles de longueur n* notée C_n qui, à tout ensemble fini E , associe l'ensemble $C_n(E) = C(E)$ si E est de taille n et l'ensemble vide sinon.

3.1.1. *Structures Étiquetées vs. Structures Non-étiquetées.* On distingue essentiellement deux problématiques de dénombrement attachées à une espèce combinatoire donnée F . La première, consiste à exprimer le nombre de structures *étiquetées* d'espèce F construites sur un ensemble d'étiquettes donné E . N'importe quelle bijection entre les deux ensembles $F(E)$ et $G(E)$ préserve ce dénombrement.

La deuxième problématique, beaucoup plus délicate, consiste à compter les structures *non-étiquetées*. Il s'agit des orbites de l'action du groupe symétrique, induite par functorialité à partir de son action sur l'ensemble des étiquettes. Deux structures étiquetées étant considérées comme identiques du point de vue non-étiqueté dès que l'on peut obtenir l'une à partir de l'autre par une opération de *réétiquetage*. Pour qu'une bijection entre les deux ensembles $F(E)$ et $G(E)$ préserve ce dénombrement il suffit qu'elle commute aux réétiquetages.

3.1.2. *Séries associées.* A une espèce combinatoire F , on associe trois séries génératrices $F(t)$, $\tilde{F}(t)$ et $\mathcal{Z}_F(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots)$ en l'indéterminée commutative t (de poids un) pour les deux premières et en l'infinité d'indéterminées commutatives x_1, \dots, x_k, \dots (de poids $1, \dots, k, \dots$ respectivement) pour la dernière. Elles correspondent chacune à une problématique de dénombrement précise.

1. La série génératrice exponentielle ou série de Hurwitz

$$F(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n \quad \text{avec } a_n \stackrel{\text{def.}}{=} |F(\{1, \dots, n\})|$$

qui compte les structures étiquetées.

2. La série génératrice des types d'isomorphisme

$$\tilde{F}(t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{a}_n t^n \quad \text{avec } \tilde{a}_n \stackrel{\text{def.}}{=} |F(\{1, \dots, n\})/\mathfrak{S}_n|$$

qui compte les classes d'isomorphisme des structures.

3. Enfin, la série indicatrice des cycles, ou série de Joyal-Pólya [24, 18, 20],

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_F &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma_1, \dots, \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{a_{k_1, \dots, k_n}}{1^{k_1} k_1! \cdots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \end{aligned}$$

où l'on désigne par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les nombres de cycles de longueur 1 à n de la permutation σ et où $a_{\sigma_1, \dots, \sigma_n}$ désigne le nombre de points fixes de la permutation $\sigma_* = F(\sigma)$ induite par F sur l'ensemble $F(\{1, \dots, n\})$ des structures d'espèce F construites au-dessus de l'ensemble $X = \{1, \dots, n\}$. La notation précédente est justifiée puisque ce nombre ne dépend que du type cyclique de σ (*i.e.* les entiers $\sigma_1, \dots, \sigma_n$). On peut donc utiliser la notation a_{k_1, \dots, k_n} , où k_1, \dots, k_n sont des entiers vérifiant $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$.

Les trois séries précédentes sont des *invariants* de l'espèce combinatoire F pour la notion d'isomorphisme d'espèces combinatoires. Mais si l'on omettait la condition de naturalité présente dans la définition 3.2, seule la première série serait conservée par isomorphisme. C'est là, la lacune principale de la combinatoire bijective qui empêchait, avant la théorie des espèces, de traiter des exemples significatifs de dénombrements non-étiquetés. Les seuls dénombrements non-étiquetés s'obtenaient tous jusque-là, à partir d'un dénombrement étiqueté, en résolvant les symétries par une astuce.

Le dénombrement de diagrammes pointés que l'on donne la section 3.4 est un exemple d'application d'une telle méthode ; il s'obtient sans recourir aux séries indicatrices. Par contraste, il semble impossible d'obtenir le dénombrement de diagrammes non-pointés à partir d'un dénombrement de structures étiquetées. Le recours aux séries indicatrices est donc indispensable dans ce cas.

Lemme de condensation. *La série indicatrice des cycles \mathcal{Z}_F d'une espèce F raffine les deux séries génératrices $F(t)$ et $\tilde{F}(t)$ au sens où l'on a $F(t) = \mathcal{Z}_F(t, 0, 0, \dots)$ et $\tilde{F}(t) = \mathcal{Z}_F(t, t^2, t^3, \dots)$.*

Remarque. Ces deux changements de variable sont compatibles avec la graduation posée précédemment.

Démonstration. La première formule résulte immédiatement de l'interprétation combinatoire des coefficients. La deuxième est quant à elle conséquence immédiate du lemme de Burnside. \square

Exemples. Nous donnons ci dessous, les formules pour la série d'index cyclique de l'espèce des ensembles et de celle des permutations. Le cas des espèces C , C_n et S_n des cycles, des cycles de longueur n et des permutations d'ordre n respectivement, est l'objet de la section 3.5.

1. Pour l'espèce Ens des ensembles, on a trivialement $a_n = 1$, $\tilde{a}_n = 1$ et $a_{k_1, \dots, k_n} = 1$. D'où il résulte aussitôt,

$$\begin{aligned} \text{Ens}(t) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} t^n = \exp(t) \\ \widetilde{\text{Ens}}(t) &= \sum_{n \geq 0} t^n = \frac{1}{1-t} \\ \mathcal{Z}_{\text{Ens}}(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{1}{1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \\ &= \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{1}{k^n n!} x_k^n \right) \\ &= \prod_{k \geq 1} \exp\left(\frac{x_k}{k}\right) \end{aligned}$$

2. Pour l'espèce S des permutations, on a trivialement $a_n = n!$, $\tilde{a}_n = p_n$, où p_n est le nombre de partitions de l'entier n , et $a_{k_1, \dots, k_n} = 1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!$.

D'où il résulte aussitôt,

$$\begin{aligned}
S(t) &= \sum_{n \geq 0} t^n = \frac{1}{1-t} \\
\tilde{S}(t) &= \sum_{n \geq 0} p_n t^n = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-t^k} \quad \text{d'après Euler,} \\
\mathcal{Z}_S(x_1, x_2, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n} \\
&= \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} x_k^n \right) \\
&= \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1-x_k}
\end{aligned}$$

Nous donnons dans la section suivante, les formules pour la série d'index cyclique des espèces C , C_n et S_n des cycles, des cycles de longueur n et des permutations d'ordre n respectivement.

3.2. Exponentiation et Logarithme d'Espèces Combinatoires. Les formules concernant la série d'index cyclique des trois espèces C , C_n et S_n des *cycles*, des *cycles de longueur n* et des *permutations d'ordre n* respectivement s'obtiennent par un jeu faisant intervenir les deux opérations d'*exponentiation* et de *logarithme* d'une espèce combinatoire.

On suppose donnée une espèce combinatoire F pour laquelle on ait $F(\emptyset) = \emptyset$. On note $\text{Ens}(F)$ ou encore F^* , l'espèce obtenue à partir de l'espèce F par *composition* pléthystique avec le foncteur Ens de l'espèce des ensembles. Il s'agit de l'*exponentielle* de l'espèce F . Les $\text{Ens}(F)$ -structures sont par définition des *assemblées* [20] de F -structures. De façon plus précise, le foncteur $\text{Ens}(F)$ associe à tout ensemble fini E , l'ensemble dont les éléments sont les uplets $(n; P_1, \dots, P_n; A_1, \dots, A_n)$ constitués d'un entier n , d'une partition de E comportant n parties P_1, \dots, P_n et sur chacune de ces parties, la donnée A_k d'une structure d'espèce F construite au dessus d'elle (*i.e.* on impose que A_k appartienne à l'ensemble $F(P_k)$ quel que soit k).

Pour les séries de Hurwitz associées à deux espèces F et G reliées par la relation fonctorielle $G \simeq \text{Ens}(F)$, on a les relations suivantes, lesquelles justifient la terminologie.

$$G(t) = \exp(F(t)) \quad \text{et} \quad F(t) = \log(G(t))$$

Les séries génératrices des types d'isomorphisme satisfont aux relations plus compliquées suivantes, dues à Harary et Palmer [17].

$$\tilde{G}(t) = \exp\left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \tilde{F}(t^n)\right) \quad \text{et} \quad \tilde{F}(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \log\left(\tilde{G}(t^n)\right)$$

où μ désigne la fonction de Möbius.

Ces formules admettent la généralisation suivante, due à Joyal [20], au cas des séries d'index cyclique associées aux espèces F et G .

$$\mathcal{Z}_G = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \mathcal{Z}_{F,k}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_F = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log(\mathcal{Z}_{G,k})$$

où $\mathcal{Z}_{F,k}$ et $\mathcal{Z}_{G,k}$ désignent les séries obtenues à partir des séries \mathcal{Z}_F et \mathcal{Z}_G respectivement, en effectuant le changement de variable consistant à remplacer la variable x_n par la variable x_{kn} , et cela simultanément pour tout $n \geq 1$. Autrement dit, si de manière générale, on note $\mathcal{Z}_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ la série indicatrice d'une espèce F , quel que soit l'entier $k \geq 1$, on a :

$$\mathcal{Z}_{F,k}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \mathcal{Z}_F(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$$

3.3. Produit Cartésien de deux Espèces, Somme Directe. Le produit cartésien de deux espèces, s'interprète comme une *superposition de structures*, contrairement au produit habituel qui lui, s'interprète comme une *juxtaposition de structures*. La somme directe s'interprète elle, comme une *disjonction de structures*. De façon plus précise :

Définition 3.3. Le *produit cartésien* de deux espèces combinatoires F et G , est l'espèce notée $F \times G$, définie pour tout ensemble fini E et toute application bijective f entre deux ensembles finis E_1 et E_2 , par :

$$\begin{aligned} (F \times G)(E) &= F(E) \times G(E) \\ (F \times G)(f) &= F(f) \times G(f) \end{aligned}$$

Définition 3.4. On définit de même, la *somme directe* de deux espèces combinatoires F et G , notée $F + G$, qui à tout ensemble fini E et toute application bijective f entre deux ensembles finis E_1 et E_2 , associe respectivement :

$$\begin{aligned} (F + G)(E) &= F(E) \sqcup G(E) \\ (F + G)(f) &= F(f) \sqcup G(f) \end{aligned}$$

De façon plus précise, si l'on note :

$$\begin{array}{lll} E'_1 = F(E_1) & E'_2 = F(E_2) & f' = F(f) \\ E''_1 = G(E_1) & E''_2 = G(E_2) & f'' = G(f) \end{array}$$

On a deux diagrammes commutatifs comme suit :

$$\begin{array}{ccc} E'_1 \xleftarrow{\pi'_1} E'_1 \times E''_1 \xrightarrow{\pi''_1} E''_1 & E'_1 \xrightarrow{\rho'_1} E'_1 \sqcup E''_1 \xleftarrow{\rho''_1} E''_1 & \\ \downarrow f' & \downarrow f' & \downarrow f' \\ E'_2 \xleftarrow{\pi'_2} E'_2 \times E''_2 \xrightarrow{\pi''_2} E''_2 & E'_2 \xrightarrow{\rho'_2} E'_2 \sqcup E''_2 \xleftarrow{\rho''_2} E''_2 & \\ & \downarrow f' \sqcup f'' & \downarrow f'' \end{array}$$

où l'on note π les projections naturelles associées à chacun des deux produits cartésiens et ρ les injections naturelles associées à chacune des deux réunions disjointes. De la sorte, la flèche verticale du milieu de chacun des deux diagrammes

est nécessairement unique et le produit cartésien de deux espèces F et G est le *produit direct*, au sens des catégories, des deux foncteurs correspondants. Idem pour la somme directe, qui s'interprète comme une *somme directe* de foncteurs ou *coproduit*.

Remarque. Le produit cartésien $F \times G$ de deux espèces combinatoires F et G ne correspond pas au produit habituel, noté $F \cdot G$ et il en est de même pour les séries associées. Parmi ces deux notions, nous n'aurons toutefois à considérer que le cas du produit cartésien et non celui du produit usuel.

3.3.1. *Dénombrement étiqueté.* Soient données deux espèces combinatoires F et G , dont les séries de Hurwitz sont les suivantes,

$$F(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n \quad \text{et} \quad G(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} t^n$$

Il est clair que la série de Hurwitz du produit cartésien $F \times G$ de ces deux espèces est le *produit de Hadamard* des deux séries précédentes :

$$F(t) \odot G(t) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n \geq 0} \frac{a_n b_n}{n!} t^n$$

Il n'existe malheureusement pas de formule de ce genre pour les séries génératrices des types d'isomorphisme. La difficulté provient du fait que le foncteur de *passage au quotient* (qui à un ensemble sur lequel opère un groupe fait correspondre l'ensemble des orbites de cette action de groupe) souffre d'un défaut d'exactitude à *gauche* : il ne commute pas au produit cartésien et n'a pas d'adjoint formel à droite.

Il commute toutefois à la réunion disjointe de sorte que la série génératrice des types d'isomorphisme associée à la somme directe de deux espèces combinatoires est la somme usuelle des séries correspondantes.

3.3.2. *Dénombrement non-étiqueté.* Pour traiter de la question du produit cartésien de deux espèces combinatoires (correspondant à la *superposition* de structures) il convient, dans le cadre du dénombrement non-étiqueté, d'introduire la série de Joyal-Pólya ou *série indicatrice des cycles* de ces deux espèces. Ce type de série compte les *points fixes* de l'action de réétiquetage, et non ses *orbites*. Or le foncteur de *passage aux points fixes* d'une action de groupe est à la fois *exact à gauche* et *exact à droite*, il commute de fait, aux produits et aux sommes et admet un adjoint formel à gauche et à droite. Cela permet de retrouver un principe de comptage. Il résulte en particulier, le lemme suivant qui établit des formules qui combinées au lemme de condensation permettent de traiter cette question.

Lemme 3.1. *Si l'on note par \mathcal{Z}_F et \mathcal{Z}_G les séries indicatrices des cycles [24, 18, 20] de deux espèces combinatoires F et G :*

$$\mathcal{Z}_F = \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{a_{k_1, \dots, k_n}}{1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{Z}_G = \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{b_{k_1, \dots, k_n}}{1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

La série indicatrice des cycles du produit cartésien $F \times G$ est simplement le produit de Hadamard des deux séries précédentes :

$$\mathcal{Z}_F \odot \mathcal{Z}_G \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{a_{k_1, \dots, k_n} b_{k_1, \dots, k_n}}{1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

La série indicatrice des cycles de la somme directe $F + G$ est la somme usuelle $\mathcal{Z}_F + \mathcal{Z}_G$ (terme à terme) des deux séries \mathcal{Z}_F et \mathcal{Z}_G .

Application 3. Considérons les espèces D et D^* , des *diagrammes* au sens de la définition 1.8, respectivement connexes et non-nécessairement connexes. On rappelle qu'il s'agit de graphes au sens des définitions 1.1 et 1.2 munis d'une orientation cyclique aux sommets au sens de la définition 1.6 et dépourvus de sommets isolés. En vertu du théorème 1.2 on sait que l'espèce D^* est isomorphe à celle des ensembles munis d'une action du groupe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On sait aussi, ce qui est équivalent par application du principe 1, qu'elle est isomorphe à l'espèce des ensembles munis chacun d'une action indépendante des deux groupes \mathbb{Z} et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. De là, on tire les deux isomorphismes naturels suivants :

$$\text{Ens}(D) \simeq D^* \simeq S_2 \times S$$

où l'on désigne par S_2 l'espèce des *involutions* et par S celle des *permutations* quelconques et où le premier isomorphisme traduit l'existence et l'unicité de la décomposition d'un diagramme en somme directe de ses composantes connexes.

Application 4. Si l'on se restreint aux espèces D_3 et D_3^* des *diagrammes trivalents*, respectivement connexes et non-nécessairement connexes, on a comme précédemment, conformément au lemme 1.1, les deux isomorphismes naturels suivants :

$$\text{Ens}(D_3) \simeq D_3^* \simeq S_2 \times S_3$$

où l'on désigne comme ci-dessus, par S_2 l'espèce des involutions et par S_3 celle des permutations d'ordre trois.

3.4. Dénombrement de Diagrammes Pointés. Nous considérons dans cette section les deux espèces D_3^\bullet et D_3 , des diagrammes trivalents connexes, respectivement *pointés* et *non-pointés*. Nous donnerons ci-dessous des exemples permettant de bien saisir la distinction. Nous considérons les séries formelles suivantes associées à ces deux espèces.

| Diagrammes | Pointés | Non-pointés |
|---------------|--|--|
| Etiquetés | $D_3^\bullet(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n^\bullet}{n!} t^n$ | $D_3(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} t^n$ |
| Non-Etiquetés | $\tilde{D}_3^\bullet(t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{a}_n^\bullet t^n$ | $\tilde{D}_3(t) = \sum_{n \geq 0} \tilde{a}_n t^n$ |

On a trivialement la relation suivante, qui exprime que le choix d'un point base sur les structures étiquetées revient à appliquer l'opérateur d'Euler à la séries génératrices de Hurwitz.

$$D_3^\bullet(t) = t \frac{d}{dt} D_3(t)$$

Comme d'autre part, les diagrammes trivalents connexes pointés sont des structures *rigides*, au sens où elle n'admettent pas d'automorphisme, on a $\tilde{D}_3^\bullet(t) = D_3^\bullet(t)$. De cela il résulte,

$$a_n^\bullet = n a_n \quad \text{et} \quad \tilde{a}_n^\bullet = \frac{a_n^\bullet}{n!} \quad \text{puis} \quad \tilde{a}_n^\bullet = \frac{a_n}{(n-1)!}$$

On s'est donc ramenés, pour compter le nombre \tilde{a}_n^\bullet de diagrammes trivalents connexes pointés et non-étiquetés, à compter le nombre a_n de diagrammes trivalents connexes étiquetés.

De l'isomorphisme $\text{Ens}(D_3) \simeq S_2 \times S_3$ on tire la relation $D_3(t) = \log(S_2(t) \odot S_3(t))$. On sait d'autre part que les séries $S_2(t)$ et $S_3(t)$ admettent les expressions simples suivantes

$$S_2(t) = \exp\left(t + \frac{t^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad S_3(t) = \exp\left(t + \frac{t^3}{3}\right)$$

On obtient alors l'expression suivante permettant de calculer les coefficients de la série génératrice $\tilde{D}_3^\bullet(t)$:

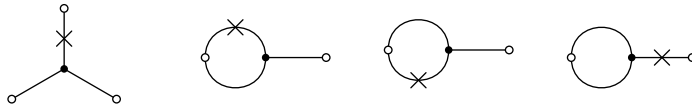
$$D_3(t) = \log\left(\sum_{n \geq 0} n! t^n \sum_{\substack{n_1+2n_2=n \\ n_3+3n_4=n}} \frac{1}{n_1! n_2! n_3! n_4! 2^{n_2} 3^{n_4}}\right)$$

Les coefficients de la série sous le log, laquelle n'est autre que $D_3^\bullet(t)$, peuvent être calculés efficacement en utilisant l'équation de récurrence linéaire donnée dans la table 6. On aboutit finalement au dénombrement suivant, sous la forme de la série $\tilde{D}_3^\bullet(t)$, des sous-groupes du groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\tilde{D}_3^\bullet(t) = t + t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 5t^5 + 22t^6 + 42t^7 + \dots$$

Il reste maintenant à calculer la série $\tilde{D}_3(t)$, ce qui sera fait au moyen de séries de Joyal-Pólya au paragraphe 3.6. Nous améliorons le calcul au moyen de la notion de forme factorisée et nous donnons une formule explicite au paragraphe 3.7.

Application 5. Le groupe modulaire admet donc un seul sous-groupe d'indice deux, nécessairement distingué et quatre sous-groupes d'indice trois. Il est facile sur les diagrammes correspondants de constater que parmi ces quatre sous-groupes, un seul est distingué et que les trois autres sont conjugués entre eux.



$$\left\{ \begin{array}{l} a_0^* = 1, \quad a_1^* = 1, \quad a_2^* = 1, \quad a_3^* = 2, \quad a_4^* = \frac{15}{4}, \quad a_5^* = \frac{91}{20}, \\ (n^4 + 18n^3 + 119n^2 + 343n + 366) a_{n+6}^* = \\ \quad (n^5 + 18n^4 + 121n^3 + 373n^2 + 511n + 242) a_n^* \\ \quad + (3n^2 + 15n + 18) a_{n+1}^* \\ \quad + (2n^4 + 33n^3 + 205n^2 + 566n + 582) a_{n+2}^* \\ \quad + (3n^4 + 52n^3 + 938n^2 + 333n + 982) a_{n+3}^* \\ \quad + (n^3 + 12n^2 + 53n + 85) a_{n+4}^* \\ \quad + (n^3 + 9n^2 + 20n + 1) a_{n+5}^* \end{array} \right.$$

TAB. 6. Relation de récurrence de longueur six vérifiée par les coefficients de la série $D_3^*(t)$.

$$\begin{aligned} \tilde{D}_3^\bullet(t) = & t + t^2 + 4t^3 + 8t^4 + 5t^5 + 22t^6 + 42t^7 + 40t^8 + 120t^9 + 265t^{10} + 286t^{11} \\ & + 764t^{12} + 1729t^{13} + 2198t^{14} + 5168t^{15} + 12144t^{16} + 17034t^{17} + 37702t^{18} \\ & + 88958t^{19} + 136584t^{20} + 288270t^{21} + 682572t^{22} + 1118996t^{23} \\ & + 2306464t^{24} + 5428800t^{25} + 9409517t^{26} + 19103988t^{27} + 44701696t^{28} \\ & + 80904113t^{29} + 163344502t^{30} + 379249288t^{31} + 711598944t^{32} \\ & + 1434840718t^{33} + 3308997062t^{34} + 6391673638t^{35} + 12921383032t^{36} \\ & + 29611074174t^{37} + 58602591708t^{38} + 119001063028t^{39} \\ & + 271331133136t^{40} + 547872065136t^{41} + 1119204224666t^{42} \\ & + 2541384297716t^{43} + 5219606253184t^{44} + 10733985041978t^{45} \\ & + 24300914061436t^{46} + 50635071045768t^{47} + 104875736986272t^{48} \\ & + 236934212877684t^{49} + 499877970985660t^{50} + o(t^{50}) \end{aligned}$$

TAB. 7. Développement à l'ordre cinquante de la série $\tilde{D}_3^\bullet(t)$ donnant le nombre de diagrammes trivalent connexes pointés (A005133).

On a huit sous-groupes d'indice quatre formant deux classes de conjugaison correspondant chacune au quatre façons de pointer chacun des deux diagrammes trivalents de taille quatre. On a cinq sous-groupes d'indice cinq tous conjugués entre eux, correspondant aux cinq pointages de l'unique diagramme trivalent de taille cinq.

Parmi les sous-groupes d'indice six, seuls deux sont distingués, ils correspondent aux deux diagrammes non-équivalents suivants,



qui ont pour groupes d'automorphisme, le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 et le groupe cyclique $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ respectivement.

Ces deux diagrammes correspondent à deux sous-groupes bien connus de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Le premier, n'est autre que le *groupe modulaire de niveau deux*, lequel est isomorphe au groupe libre à deux générateurs et est associé à la classification des courbes elliptiques modulo les isogénies centralisées par leurs points de deux-division. On l'obtient comme noyau du morphisme naturel $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_3$. Le deuxième diagramme correspond lui, au sous-groupe dérivé constitué des commutateurs de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, le groupe cyclique $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est par conséquent l'*abélianisé* de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, *i.e.* son premier groupe d'homologie.

3.5. Dénombrement de Permutations. Nous cherchons à présent à déterminer explicitement les coefficients des séries \mathcal{Z}_{S_n} pour $n = 2$ et 3 afin de pouvoir calculer les termes de la série génératrice des types de l'espèce D_3 . Nous le faisons plus généralement pour $n = p$ un nombre premier quelconque, et le même raisonnement s'appliquerait pour un nombre entier n quelconque avec des formules plus compliquées au fur et à mesure que le nombre de diviseurs de n augmente.

Lemme 3.2. *On a l'écriture suivante pour la série d'index cyclique \mathcal{Z}_C associée à l'espèce des cycles,*

$$\mathcal{Z}_C = \sum_{\substack{r \geq 1 \\ s \geq 1}} \frac{\varphi(r) x_r^s}{rs}$$

où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Démonstration. A partir de l'isomorphisme naturel $S \simeq \mathrm{Ens}(C)$ exprimant l'existence et l'unicité de la décomposition des permutations en cycles à support disjoints, on obtient, au moyen de la formule d'inversion de Möbius, la série indicatrice de l'espèce des cycles :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_C &= \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log \left(\prod_{l \geq 1} \frac{1}{1 - x_{kl}} \right) \\ &= \sum_{r \geq 1} \sum_{d|r} \frac{\mu(d)}{d} \log \left(\frac{1}{1 - x_r} \right) \\ &= \sum_{r \geq 1} \frac{\varphi(r)}{r} \log \left(\frac{1}{1 - x_r} \right) \\ &= \sum_{\substack{r \geq 1 \\ s \geq 1}} \frac{\varphi(r) x_r^s}{rs} \end{aligned}$$

Fin de la démonstration. □

Lemme 3.3. *On a l'écriture suivante pour la série d'index cyclique \mathcal{Z}_{C_n} associée à l'espèce des cycles de longueur n ,*

$$\mathcal{Z}_{C_n} = \sum_{rs=n} \frac{\varphi(r) x_r^s}{n}$$

Démonstration. Il s'agit de regrouper les termes de la série \mathcal{Z}_C calculée précédemment, en paquets homogènes de même poids. On obtient alors l'expression de $\mathcal{Z}_{C_n} = \mathcal{Z}_C^{[n]}$, la composante homogène de poids n de \mathcal{Z}_C :

$$\mathcal{Z}_C = \sum_{n \geq 0} \sum_{rs=n} \frac{\varphi(r) x_r^s}{n} \quad \text{d'où,} \quad \mathcal{Z}_{C_n} = \sum_{rs=n} \frac{\varphi(r) x_r^s}{n}$$

Fin de la démonstration. □

Théorème 3.4. *La série indicatrice de l'espèce S_n des permutations σ d'ordre n (i.e. qui satisfait à la relation $\sigma^n = 1$) est donnée par la formule ci-dessous où φ désigne l'indicatrice d'Euler.*

$$\mathcal{Z}_{S_n} = \prod_{k \geq 1} \prod_{\substack{rs|n \\ r|k}} \exp \frac{\varphi(r) x_k^s}{ks}$$

Important. *On observe un phénomène de séparation des variables, lequel est à l'origine de l'algorithme rapide de calcul de séries génératrices des types d'isomorphisme, donné au paragraphe 3.7 : la série génératrice \mathcal{Z}_{S_n} s'exprime comme produit de séries univariées en les x_k .*

Démonstration. Comme une permutation d'ordre n se décompose canoniquement en cycles d'ordre d où d divise n , on obtient un isomorphisme naturel $S_n \simeq \text{Ens}(\sum_{d|n} C_d)$. D'où,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{S_n} &= \exp \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \sum_{d|n} \sum_{rs=d} \frac{\varphi(r) x_{kr}^s}{d} \\ &= \exp \sum_{k \geq 1} \sum_{rs|n} \frac{\varphi(r) x_{kr}^s}{krs} \\ &= \prod_{k \geq 1} \prod_{\substack{rs|n \\ r|k}} \exp \frac{\varphi(r) x_k^s}{ks} \end{aligned}$$

Fin de la démonstration. □

Les deux résultats suivants donnent les coefficients de la série \mathcal{Z}_{S_n} sous une forme plus explicite en se restreignant pour simplifier, au cas où l'entier n est un nombre premier p . Les raisonnements s'étendent sans difficulté au cas d'un entier n quelconque mais nous ne ferons usage que des cas $p = 2$ et $p = 3$ dans la suite.

Théorème 3.5. *Pour p un nombre premier quelconque, on a l'écriture suivante, sous forme factorisée de la série indicatrice de l'espèce des permutations d'ordre p ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{S_p} &= \prod_{k \geq 1} \exp \left(\chi_{p,k} \frac{x_k}{k} + \frac{x_k^p}{pk} \right) \\ &= \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{n_1 + pn_2 = n} \frac{\chi_{p,k}^{n_1}}{n_1! n_2! k^{n_1+n_2} p^{n_2}} x_k^n \right) \end{aligned}$$

où le symbole $\chi_{p,k}$ vaut p ou 1 suivant que k est divisible par p ou non.

Démonstration. Il s'agit d'expliciter les coefficients de la série \mathcal{Z}_{S_p}

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_{S_p} &= \prod_{k \geq 1} \exp \sum_{\substack{rs|p \\ r|k}} \frac{\varphi(r) x_k^s}{ks} \\ &= \prod_{k \geq 1} \exp \left(\frac{\varphi(1) x_k}{k} + \frac{\varphi(1) x_k^p}{kp} + \begin{cases} \frac{\varphi(p) x_k}{k} & \text{si } k \equiv 0 \pmod{p} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \right) \\ &= \prod_{k \geq 1} \exp \left(\chi_{p,k} \frac{x_k}{k} + \frac{x_k^p}{kp} \right) \quad \text{avec } \chi_{p,k} = \begin{cases} p & \text{si } k \equiv 0 \pmod{p} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Il suffit à présent d'extraire les coefficients de cette série indicatrice. On observe pour cela le développement de Taylor suivant,

$$\exp(az + bz^p) = \sum_{\substack{n_1 \geq 0 \\ n_2 \geq 0}} \frac{a^{n_1} b^{n_2}}{n_1! n_2!} z^{n_1 + pn_2}$$

qui nous donne bien (en effectuant un changement de variables convenable),

$$\mathcal{Z}_{S_p} = \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{n_1 + pn_2 = n} \frac{\chi_{p,k}^{n_1}}{n_1! n_2! k^{n_1 + n_2} p^{n_2}} x_k^n \right)$$

Fin de la démonstration. □

Théorème 3.6. *Le nombre $u_p(\sigma)$ de permutations d'ordre p premier sur un ensemble à n éléments, qui commutent à une permutation σ ne dépend que du type cyclique $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de σ (où σ_k désigne le nombre de cycles de longueur k présent dans la décomposition cyclique de σ), et vaut :*

$$u_p(\sigma) = \prod_{k=1}^n \sum_{n_1 + pn_2 = \sigma_k} \frac{\sigma_k! k^{\sigma_k} \chi_{p,k}^{n_1}}{n_1! n_2! k^{n_1 + n_2} p^{n_2}} \quad \text{avec } \chi_{p,k} = \begin{cases} p & \text{si } p \text{ divise } k, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Le premier point est évident. Il est alors permis de noter $u_p(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ la valeur de $u_p(\sigma)$. Pour montrer le deuxième point nous nous appuyons sur le théorème 3.5 démontré précédemment.

$$\mathcal{Z}_{S_p} = \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{n_1 + pn_2 = n} \frac{\chi_{p,k}^{n_1}}{n_1! n_2! k^{n_1 + n_2} p^{n_2}} x_k^n \right)$$

et puisque l'on a, par définition :

$$\mathcal{Z}_{S_p} = \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{u_p(k_1, \dots, k_n)}{1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$$

Il ne reste plus qu'à identifier les coefficients de ces deux écritures. Fin de la démonstration. □

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{S_2} = & 1 + x_1 + \frac{1}{2} (2x_1^2 + 2x_2) + \frac{1}{6} (4x_1^3 + 6x_1x_2 + 2x_3) \\
& + \frac{1}{24} (10x_1^4 + 24x_1^2x_2 + 8x_1x_3 + 18x_2^2 + 12x_4) \\
& + \frac{1}{120} (26x_1^5 + 80x_1^3x_2 + 40x_1^2x_3 + 90x_1x_2^2 + 60x_1x_4 + 40x_2x_3 + 24x_5) \\
& + \frac{1}{720} \left(\begin{array}{l} 76x_1^6 + 300x_1^4x_2 + 160x_1^3x_3 + 540x_1^2x_2^2 + 360x_1^2x_4 \\ + 240x_1x_2x_3 + 144x_1x_5 + 300x_2^3 + 360x_2x_4 + 160x_3^2 \\ + 240x_6 \end{array} \right) \\
& + \frac{1}{5040} \left(\begin{array}{l} 232x_1^7 + 1092x_1^5x_2 + 700x_1^4x_3 + 2520x_1^3x_2^2 + 1680x_1^3x_4 \\ + 1680x_1^2x_2x_3 + 1008x_1^2x_5 + 2100x_1x_2^3 + 2520x_1x_2x_4 \\ + 1120x_1x_3^2 + 1680x_1x_6 + 1260x_2^2x_3 + 1008x_2x_5 \\ + 840x_3x_4 + 720x_7 \end{array} \right) \\
& + \text{etc...}
\end{aligned}$$

TAB. 8. Série indicatrice des cycles de l'espèce S_2 .

3.6. Calcul explicite : première méthode. Fort des formules que l'on vient d'obtenir nous tâchons à présent de compter les diagrammes trivalents non-pointés. Nous commençons pour cela par évaluer explicitement les séries indicatrices \mathcal{Z}_{S_2} et \mathcal{Z}_{S_3} de l'espèce des permutations d'ordre *deux* et *trois* respectivement, puis nous évaluons celle de l'espèce $D_3^* \simeq S_2 \times S_3$ des diagrammes trivalents non-nécessairement connexes.

Pour donner une idée des calculs, nous présentons dans les tables numériques 8 et 9 ci-contre, le développement en filtration *sept* de ces deux séries. Elles sont obtenues en explicitant la formule du théorème 3.6 avec $p = 2$ puis $p = 3$. La table 10 donne quant à elle les coefficients de la série indicatrice des cycles de l'espèce $S_2 \times S_3$. Ils s'obtiennent, conformément au lemme 3.1 en effectuant le produit de Hadamard des deux séries précédentes.

En effectuant le changement de variable $x_k \rightarrow t^k$ dans cette dernière série on obtient, conformément au lemme de condensation et à l'isomorphisme $D_3^* \simeq S_2 \times S_3$, les huit premiers termes de la série génératrice des types d'isomorphisme de l'espèce D_3^* des diagrammes trivalents non-nécessairement connexes :

$$\tilde{D}_3^*(t) = 1 + t + 2t^2 + 4t^3 + 7t^4 + 10t^5 + 24t^6 + 37t^7 + \dots$$

La série génératrice des types d'isomorphismes de l'espèce D_3 des diagrammes trivalents connexes s'obtient, au moyen de la formule d'inversion de Möbius en vertu de l'isomorphisme naturel $D_3^* \simeq \text{Ens}(D_3)$ qui traduit l'existence et l'unicité de la décomposition d'un diagramme trivalent quelconque en ses composantes connexes.

$$\tilde{D}_3(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log(\tilde{D}_3^*(t^k))$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{S_3} = & 1 + x_1 + \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2) + \frac{1}{6} (3x_1^3 + 3x_1x_2 + 6x_3) \\
& + \frac{1}{24} (9x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 24x_1x_3 + 3x_2^2 + 6x_4) \\
& + \frac{1}{120} (21x_1^5 + 30x_1^3x_2 + 60x_1^2x_3 + 15x_1x_2^2 + 30x_1x_4 + 60x_2x_3 + 24x_5) \\
& + \frac{1}{720} \left(\begin{aligned} & 81x_1^6 + 135x_1^4x_2 + 360x_1^3x_3 + 45x_1^2x_2^2 + 90x_1^2x_4 + 360x_1x_2x_3 \\ & + 144x_1x_5 + 135x_2^3 + 90x_2x_4 + 360x_3^2 + 360x_6 \end{aligned} \right) \\
& + \frac{1}{5040} \left(\begin{aligned} & 351x_1^7 + 441x_1^5x_2 + 1890x_1^4x_3 + 315x_1^3x_2^2 + 630x_1^3x_4 \\ & + 1260x_1^2x_2x_3 + 504x_1^2x_5 + 945x_1x_2^3 + 630x_1x_2x_4 + 2520x_1x_3^2 \\ & + 2520x_1x_6 + 630x_2^2x_3 + 504x_2x_5 + 1260x_3x_4 + 720x_7 \end{aligned} \right) \\
& + \text{etc...}
\end{aligned}$$

TAB. 9. Série indicatrice des cycles de l'espèce S_3 .

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{S_2} \odot \mathcal{Z}_{S_3} = & 1 + x_1 + \frac{1}{2} (2x_1^2 + 2x_2) + \frac{1}{6} (12x_1^3 + 6x_1x_2 + 6x_3) \\
& + \frac{1}{24} (90x_1^4 + 24x_1^2x_2 + 24x_1x_3 + 18x_2^2 + 12x_4) \\
& + \frac{1}{120} \left(\begin{aligned} & 546x_1^5 + 240x_1^3x_2 + 120x_1^2x_3 + 90x_1x_2^2 + 60x_1x_4 \\ & + 120x_2x_3 + 24x_5 \end{aligned} \right) \\
& + \frac{1}{720} \left(\begin{aligned} & 6156x_1^6 + 2700x_1^4x_2 + 1440x_1^3x_3 + 540x_1^2x_2^2 \\ & + 360x_1^2x_4 + 720x_1x_2x_3 + 144x_1x_5 + 2700x_2^3 \\ & + 360x_2x_4 + 1440x_3^2 + 720x_6 \end{aligned} \right) \\
& + \frac{1}{5040} \left(\begin{aligned} & 81432x_1^7 + 22932x_1^5x_2 + 18900x_1^4x_3 + 7560x_1^3x_2^2 \\ & + 5040x_1^3x_4 + 5040x_1^2x_2x_3 + 1008x_1^2x_5 + 18900x_1x_2^3 \\ & + 2520x_1x_2x_4 + 10080x_1x_3^2 + 5040x_1x_6 + 3780x_2^2x_3 \\ & + 1008x_2x_5 + 2520x_3x_4 + 720x_7 \end{aligned} \right) \\
& + \text{etc...}
\end{aligned}$$

TAB. 10. Série indicatrice des cycles de l'espèce $S_2 \times S_3$.

Le calcul explicite donne les premiers coefficients suivants :

$$\tilde{D}_3(t) = t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5 + 8t^6 + 6t^7 + \dots$$

3.7. Calcul explicite : deuxième méthode. Le nombre et la taille des termes d'une série indicatrice de cycle sont souvent prohibitifs et conduisent à des calculs difficilement menables. En effets, même à l'aide de puissants ordinateurs on ne peut en général guère espérer calculer en grand poids, car il y a en général p_n termes en

poids n (où p_n désigne le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments) et donc $p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n$ termes en tout dans une série tronquée en filtration n .

A titre indicatif, signalons qu'en filtration cinquante, il y a déjà plus d'un million de termes dans une série d'index cyclique générique et que dans les cas habituels, la plupart d'entre eux sont tellement gros que leur écriture nécessitent plusieurs pages manuscrites. En poids cinq cents, il faudrait compter environ $4,2 \times 10^{22}$ termes dont la taille serait bien plus grande encore. Autant dire que l'on ne peut guère espérer mener les calculs très loin sans introduire d'idée nouvelle.

Nous avons réussi à mener les calculs au-delà du poids cinq cents à l'aide d'un station de bureau en un temps très bref (environ un quart d'heure). La solution provient de la notion suivante :

Définition 3.5. Une série indicatrice de cycle \mathcal{Z} est dite *séparable* si elle admet une écriture de la forme suivante :

$$\mathcal{Z} = \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{a_{k,n}}{k^n n!} x_k^n \right) \quad \text{avec } a_{k,0} = 1 \text{ pour tout } k \geq 1.$$

(un produit de séries univariées en les x_k .)

Une telle écriture s'appelle *forme factorisée* de la série \mathcal{Z} . Les coefficients $a_{k,n}$ sont alors *uniques*. En développant, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \left(\frac{a_{1,k_1}}{1^{k_1} k_1!} x_1^{k_1} \right) \dots \left(\frac{a_{n,k_n}}{n^{k_n} k_n!} x_n^{k_n} \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n} \frac{a_{k_1, \dots, k_n}}{1^{k_1} k_1! \dots n^{k_n} k_n!} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \end{aligned}$$

où l'on a posé $a_{k_1, \dots, k_n} = a_{1,k_1} \dots a_{n,k_n}$.

L'intérêt principal de cette notion est que le nombre de termes présents dans chacune des sommes entre parenthèses dans la formule de la définition 3.5 est m/n en filtration m puisque le terme x_n^k est de poids kn . Le nombre total de termes est donc $m + m/2 + m/3 + \dots + 1 = O(m \log(m))$ ce qui est petit. Si l'on est capable d'effectuer les calculs directement sur la forme factorisée, on assiste à un effondrement de la complexité, que l'on n'était pas en mesure d'attendre a priori. C'est à proprement parler, un petit miracle de l'arithmétique.

Une propriété étonnante des séries séparables, non évidente a priori, est précisément que le produit de Hadamard de deux telles séries s'exprime encore de façon simple en terme des coefficients de leurs formes factorisées.

Lemme 3.7. De façon précise, si

$$\mathcal{Z}_1 = \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{a_{k,n}}{k^n n!} x_k^n \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_2 = \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b_{k,n}}{k^n n!} x_k^n \right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_3(t) = & t + t^2 + 2t^3 + 2t^4 + t^5 + 8t^6 + 6t^7 + 7t^8 + 14t^9 + 27t^{10} + 26t^{11} \\
& + 80t^{12} + 133t^{13} + 170t^{14} + 348t^{15} + 765t^{16} + 1002t^{17} + 2176t^{18} \\
& + 4682t^{19} + 6931t^{20} + 13740t^{21} + 31085t^{22} + 48652t^{23} + 96682t^{24} \\
& + 217152t^{25} + 362779t^{26} + 707590t^{27} + 1597130t^{28} + 2789797t^{29} \\
& + 5449439t^{30} + 12233848t^{31} + 22245655t^{32} + 43480188t^{33} \\
& + 97330468t^{34} + 182619250t^{35} + 358968639t^{36} + 800299302t^{37} \\
& + 1542254973t^{38} + 3051310056t^{39} + 6783358130t^{40} + 13362733296t^{41} \\
& + 26648120027t^{42} + 59101960412t^{43} + 118628268978t^{44} \\
& + 238533003938t^{45} + 528281671324t^{46} + 1077341937144t^{47} \\
& + 2184915316390t^{48} + 4835392099548t^{49} + 9997568771074t^{50} + o(t^{50})
\end{aligned}$$

TAB. 11. Développement à l'ordre cinquante de la série $\tilde{D}_3(t)$ donnant le nombre de diagrammes trivalents connexes (A121350).

sont deux séries d'index cyclique séparables, présentées sous leurs formes factorisées, alors,

$$\mathcal{Z}_1 \odot \mathcal{Z}_2 = \prod_{k \geq 1} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{a_{k,n} b_{k,n}}{k^n n!} x_k^n \right)$$

Démonstration. Immédiat par inspection des formules. □

Application 6. On aboutit finalement à la série génératrice $\tilde{D}_3(t)$, laquelle énumère pour un nombre d'arêtes donné, les diagrammes trivalents connexes à isomorphisme près, ou ce qui est équivalent, les classes de conjugaison de sous-groupes d'indice fini correspondants dans le groupe modulaire $\text{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

$$\tilde{D}_3(t) = \sum_{r \geq 1} \frac{\mu(r)}{r} \sum_{k \geq 1} \log \left(\sum_{n \geq 0} n! k^n u_{k,n} v_{k,n} t^{rkn} \right)$$

où les éléments $u_{k,n}$ et $v_{k,n}$ sont les coefficients de Taylor de la fonction,

$$\exp \left(\chi_{p,k} \frac{x_k}{k} + \frac{x_k^p}{kp} \right) \quad \text{avec } \chi_{p,k} = \begin{cases} p & \text{si } k \equiv 0 \pmod{p} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour les valeurs $p = 2$ et $p = 3$ respectivement. Ce qui donne les valeurs suivantes, en effectuant le développement en série.

$$u_{k,n} = \sum_{n_1+2n_2=n} \frac{\chi_{2,k}^{n_1}}{n_1! n_2! k^{n_1+n_2} 2^{n_2}} \quad \text{et} \quad v_{k,n} = \sum_{n_1+3n_2=n} \frac{\chi_{3,k}^{n_1}}{n_1! n_2! k^{n_1+n_2} 3^{n_2}}$$

Lesquelles vérifient des équations de récurrences évidentes, d'ordre deux et trois respectivement. La table 11 ci-contre donne les cinquante premiers termes de la série $\tilde{D}_3(t)$.

$$[t^{500}] \tilde{D}_3^\bullet(t) = 129430367485890696501112403782149140632007458406669818924 \\ 049655237581302432985235983195547225893573668769081095237 \\ 520334045385563837477539980582454212848418771007253898122 \\ 98261906049050179891685415479424$$

$$[t^{500}] \tilde{D}_3(t) = 258860734971781393002224807564298281264014916813339637848 \\ 099310475162604865970471966391094451787371816235545381100 \\ 065419026649727056066352318775170749619149459628751242388 \\ 57108849306258234323621889976$$

TAB. 12. Termes de poids *cinq cents* des séries $\tilde{D}_3^\bullet(t)$ et $\tilde{D}_3(t)$.

RÉFÉRENCES

- [1] D. Arquès. Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées. *J. Combin. Theory Ser. B*, 39 :27–42, 1985.
- [2] G. V. Belyi. On galois extensions of a maximal cyclotomic field. *Math. USSR Izvestija*, 14(2) :247–256, 1980.
- [3] W.G. Brown. On the enumeration of non-planar maps. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 65, 1966.
- [4] R. Cori. *Un code pour les graphes planaires et ses applications*, volume 27 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, 1975.
- [5] D. Arquès. Relations fonctionnelles et dénombrement des cartes pointées sur le tore. *J. Combin. Theory Ser. B*, 43 :244–257, 1987.
- [6] A. Giorgetti D. Arquès. Counting rooted maps on a surface. *Theoret. Comput. Sci.*, 234 :255–272, 2000.
- [7] I. Jacques D. Arquès. Classification des cartes pointées de genre 1 et relation fonctionnelle associée. *Theoret. Comput. Sci.*, 117 :45–65, 1993.
- [8] D. Arquès, J.-F. Béraud. Énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein. *Inform. Théor. Appl.*, 31 :385–409, 1997.
- [9] P. Deligne. Formes modulaires et représentations de $gl(2)$. In *Proc. Antwerpen Conference*, volume 2, page 55–105. Springer-Verlag, 1966.
- [10] E.R. Canfield E.A. Bender. The asymptotic number of rooted maps on a surface. *J. Combin. Theory Ser. A*, 43 :244–257, 1986.
- [11] E.R. Canfield E.A. Bender. The number of rooted maps on an orientable surface. *J. Combin. Theory Ser. B*, 53 :293–299, 1991.
- [12] L.B. Richmond E.A. Bender, E.R. Canfield. The asymptotic number of rooted maps on a surface ii. enumeration by vertices and faces. *J. Combin. Theory Ser. A*, 63 :318–329, 1993.
- [13] R.W. Robinson E.A. Bender, E.R. Canfield. The enumeration of maps on the torus and the projective plane. *Can. Math. Bull.*, 31 :257–271, 1988.
- [14] Klein F. *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*. Dover New York, 1956. 2nd and rev. ed.
- [15] P. Leroux F. Bergeron, G. Labelle. *Théorie des espèces et combinatoire des structures arborescentes*. LACIM Montréal, 1994.
- [16] P. Leroux F. Bergeron, G. Labelle. *Combinatorial Species and Tree-like Structures*. Cambridge University Press, 1998. English edition of [16].
- [17] E.M. Palmer F. Harary. *Graphical Enumeration*. Academic Press New York/London, 1973.

- [18] R. C. Read G. Pólya. *Combinatorial enumeration of groups, graphs and chemical compounds*. Springer Verlag, New York, 1987.
- [19] A. Grothendieck. Esquisse d'un programme. In P. Lochak L. Schneps, editor, *Geometric Galois Actions Vol. I*, number 242 in London Math. Soc. Lecture Notes, pages 5–48. Cambridge Univ. Press, 1997.
- [20] A. Joyal. Une théorie combinatoire des séries formelles. *Adv. Math.*, 42 :1–82, 1981.
- [21] G. Labelle. Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange. *Adv. Math.*, 42 :217–247, 1981.
- [22] T.R.S. Walsh L.M. Koganov, V.A. Liskovets. Total vertex enumeration in rooted planar maps. *Ars Comb.*, 54, 1999.
- [23] Morris Newman. Asymptotic formulas related to free products of cyclic groups. *Math. Comp.*, 30(136) :838–846, 1976.
- [24] G. Pólya. Kombinatorische anzahlbestimmungen für gruppen, graphen und chemische verbindungen. *Acta Math.*, 68 :145–254, 1937.
- [25] P. E. Schupp R. C. Lyndon. *Combinatorial Group Theory*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, 2001. Reprint of the 1977 edition.
- [26] A. Machì R. Cori. Maps, hypermaps and their automorphisms : a survey I, II, III. *Expos. Math.*, 10(5) :403–427, 429–447, 449–467, 1992.
- [27] L. Schneps. Dessins d'enfants on the Riemann sphere. In P. Lochak L. Schneps, editor, *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfant*, number 200 in London Math. Soc. Lecture Notes, pages 5–48. Cambridge Univ. Press, 1994.
- [28] J.P. Serre. *Trees*. Springer Monographs in Math. Springer-Verlag, 2003.
- [29] A.K. Zvonkin S.K. Lando. *Graphs on Surfaces and Their Applications*. Springer-Verlag, 2004.
- [30] W. Stothers. The number of subgroups of given index in the modular group. *Proc. Royal Soc Edinburgh*, 78A :105–112, 1977.
- [31] A. B. Lehman T. R. S. Walsh. Counting rooted maps by genus. *J. Comb. Th.*, 13 :122–141 and 192–218, 1972.
- [32] A. B. Lehman T. R. S. Walsh. Counting rooted maps by genus III. *J. Comb. Th.*, 18 :222–259, 1975.
- [33] W. T. Tutte. A census of planar triangulations. *Canad. J. Math.*, 14 :21–38, 1962.
- [34] W. T. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15 :249–271, 1963.
- [35] W. T. Tutte. On the enumeration of planar maps. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :64–74, 1968.
- [36] W. T. Tutte. The enumerative theory of planar maps. In J. N. Srivastava, editor, *A Survey of Combinatorial Theory*, pages 437–448. North-Holland, 1973.
- [37] T.R.S. Walsh V.A. Liskovets. Counting unrooted loopless planar maps. *Eur. J. Comb.*, 26(5) :651–663, 2005.
- [38] T. R. S. Walsh. *Combinatorial Enumeration of Non-Planar Maps*. PhD thesis, Univ. of Toronto, 1971.
- [39] M.J. Dunwoody Warren Dicks. *Groups acting on graphs*, volume 17. Cambridge University Press, 1989.
- [40] Melanie Wood. Belyi-extending maps and the galois action on dessins d'enfants, 2003. to appear.
- [41] Y.N. Yeh. The calculus of virtual species and \mathbb{K} -species. In *Combinatoire énumérative*, pages 351–359. Springer-Verlag, 1966.
- [42] Y.N. Yeh. Solutions to some problems in the theory of combinatorial species. *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 11 :363–369, 1987.